ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 57, No. 2, 1987

THEOREMES DE VIABILITE POUR LES INCLUSIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE

PAR

BERNARD CORNET[a] ET GEORGES HADDAD[b]

[a] *Université de Paris I et CORE*; et [b] *Université de Nice et LATAPSES*

ABSTRACT

This paper gives conditions ensuring the existence for an initial value (x_0, v_0) of a solution to the second order differential inclusion $x''(t) \in F[x(t), x'(t)]$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ such that $x(t) \in K$ for all t where K is a nonempty given subset of R^n.

0. Introduction

Soit K un sous-ensemble non vide de $\mathbf{R}^n$ euclidien et F une correspondance de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$.

Dans cet article nous considérons le problème de l'existence pour une valeur initiale $(x_0, v_0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, d'une solution $x(\cdot)$: $[0, T] \to \mathbf{R}^n$, $T > 0$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$, du problème de viabilité du second ordre:

$$\text{(H)} \qquad \begin{cases} x''(t) \in F(x(t), x'(t)) & \text{pour presque tout } t \in [0, T[, \\ x(t) \in K & \text{pour tout } t \in [0, T[. \end{cases}$$

Alors si pour tout $x \in K$ nous désignons par $T_K(x)$ le cône contingent de Bouligand [4] défini par

$$T_K(x) = \left\{ v \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \liminf_{h \to 0^+} \frac{1}{h} d_K(x + hv) = 0 \right\}$$

où $d_K(\cdot)$ désigne la fonction distance à K, nous vérifions sans difficulté que toute solution de (H) satisfait nécessairement la condition:

$$\text{(1)} \qquad x'(t) \in T_K(x(t)) \qquad \text{pour tout } t \in [0, T[.$$

Received April 20, 1983 and in revised form May 26, 1986

Ainsi si nous définissons $G(T_K)=\{(x,v)\in K\times\mathbf{R}^n \mid v\in T_K(x)\}$ le graphe de la correspondance $T_K(\cdot)$, le problème de l'existence de solutions pour (H) se ramène de manière équivalente à celui de l'existence de solutions pour le problème de viabilité du premier ordre associé:

$$(\mathrm{H}^*)\qquad \begin{cases} \begin{cases} x'(t)=v(t) \\ v'(t)\in F(x(t),v(t)) \end{cases} & \text{pour presque tout } t\in[0,T[, \\ (x(t),v(t))\in G(T_K) & \text{pour tout } t\in[0,T[. \end{cases}$$

L'étude des problèmes de viabilité du premier ordre a fait l'objet de diverses contributions (cf. [1], [2], [3], [8], [9], [12], [13], [15], [16]), dans [10] des conditions nécessaires et suffisantes ont été données pour l'existence de solutions à partir de toute valeur initiale dans l'ensemble dans lequel les solutions doivent rester, appelé ensemble de viabilité du problème. Cependant ce résultat reposait fortement sur le fait que cet ensemble était localement compact. Ceci n'est pas vrai en général pour $G(T_K)$ l'ensemble de viabilité de (H*). En effet considérons par exemple $K=\mathbf{R}^+\subset\mathbf{R}$. Nous avons alors $T_K(0)=\mathbf{R}^+$ et $T_K(x)=\mathbf{R}$ pour tout $x>0$. Il apparaît alors clairement que $G(T_K)$ n'est pas localement compact en $(0,0)$. Ceci fait la différence essentielle entre les problèmes de viabilité du premier ordre et ceux du second ordre.

Le but de cet article est de donner cependant des conditions assurant l'existence de solution de (H) ou (H*) pour une classe très large de valeurs initiales $(x_0,v_0)\in G(T_K)$.

1. Préliminaires

Soit $\mathbf{R}^n$ espace euclidien. Pour tout $x=(x_i)_{i=1,\dots,n}$ dans $\mathbf{R}^n$ nous désignons par $\|x\|=(\Sigma_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ sa norme euclidienne. Pour tout sous-ensemble A de $\mathbf{R}^n$ nous désignons par $\operatorname{int}(A)$ l'intérieur de A et par $\bar{A}$ sa fermeture. La fonction distance $d_A(\cdot)$ à A est définie pour tout $x\in\mathbf{R}^n$ par

$$d_A(x)=\inf\{\|a-x\| \mid a\in A\}.$$

Enfin pour tout $x\in\mathbf{R}^n$ et tout $\varepsilon>0$ nous définissons $B(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbf{R}^n \mid \|y-x\|<\varepsilon\}$.

Afin d'énoncer le théorème de viabilité pour les inclusions différentielles du premier ordre nous rappelons qu'une correspondance $S\colon X\to\mathbf{R}^p$, $X\subset\mathbf{R}^n$, est une application de X dans l'ensemble des parties de $\mathbf{R}^p$. De plus nous dirons qu'une correspondance $S\colon X\to\mathbf{R}^p$ est semi-continue supérieurement (s.c.s.) si pour tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^p$, l'ensemble $\{x \in X \mid S(x) \subset \Omega\}$ est un sous-ensemble ouvert de X pour sa topologie induite.

THÉORÈME 1.1. *Soit X une partie non vide localement compacte de $\mathbf{R}^n$ et S: $X \to \mathbf{R}^n$ une correspondence s.c.s. telle que pour tout $x \in X$, $S(x)$ est convexe compact non vide.*

Alors la condition

$$(c_1) \qquad S(x) \cap T_X(x) \neq \emptyset \qquad \text{pour tout } x \in X$$

est équivalente à l'existence pour tout $x \in X$ d'un réel $T_x > 0$ et d'une application $x(\cdot)$: $[0, T_x] \to \mathbf{R}^n$ telle que $x(0) = x$ et vérifiant:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} x(\cdot) \text{ est lipschitzienne sur } [0, T_x], \\ x'(t) \in S[x(t)] \text{ pour presque tout } t \in [0, T_x], \\ x(t) \in X \text{ pour tout } t \in [0, T_x]. \end{cases}$$

De plus la condition (c_1) implique que pour tout $x_0 \in X$ il existe $T_0 > 0$ et un voisinage U_0 de x_0 dans X, tels que pour toute valeur initiale $x \in U_0$, il existe une solution de (1.1) définie sur $[0, T_0]$.

2. Quelques résultats d'existence pour le second ordre

Soit K une partie non vide de $\mathbf{R}^n$ et une correspondance F: $G(T_K) \to \mathbf{R}^n$. Dans toute la suite de l'article nous designerons pour tout $(x, v) \in G(T_K)$ et tout $T > 0$ par $S_T(x, v)$ l'ensemble des applications différentiables $x(\cdot)$: $[0, T[\to \mathbf{R}^n$ telles que $x'(\cdot)$ est lipschitzienne sur $[0, T[$, $x(0) = x$, $x'(0) = v$ et vérifiant

$$(\mathrm{H}) \qquad \begin{cases} x''(t) \in F(x(t), x'(t)) & \text{pour presque tout } t \in [0, T[, \\ x(t) \in K & \text{pour tout } t \in [0, T[. \end{cases}$$

Nous définissons enfin pour tout $(x, v) \in G(T_K)$ la notion de dérivée contingente de la correspondance $T_K(\cdot)$ au point (x, v) dans la direction v par

$$D(T_K)(x, v)(v) = \{w \in \mathbf{R}^n \mid (v, w) \in T_{G(T_K)}(x, v)\}.$$

Nous avons alors la proposition suivante:

PROPOSITION 2.1. *Soit K une partie non vide de $\mathbf{R}^n$ telle que $G(T_K)$ est localement compact et F: $G(T_K) \to \mathbf{R}^n$ une correspondance s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides.*

Alors la condition

$$(c_2)\qquad F(x, v) \cap D(T_K)(x, v)(v) \neq \emptyset \qquad \textit{pour tout } (x, v) \in G(T_K)$$

est équivalente à l'existence pour tout $(x, v) \in G(T_K)$ *d'un réel* $T > 0$ *tel que* $S_T(x, v)$ *est non vide.*

DÉMONSTRATION. La démonstration est une conséquence directe du Théorème 1.1 en se ramenant à (H^*) et en remarquant que la condition (c_2) est équivalente à

$$(c_2^*)\qquad \{v\} \times F(x, v) \cap T_{G(T_K)}(x, v) \neq \emptyset \qquad \text{pour tout } (x, v) \in G(T_K).$$

Un exemple caractéristique d'ensemble K tel que $G(T_K)$ est localement compact est donné par

$$K = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$$

où Ω désigne un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et g une application continûment différentiable de Ω dans $\mathbf{R}^p$ telle que $g'(x) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^p)$ est supposée surjective pour tout $x \in K$. Dans ce cas, en tout $x \in K$ le cône contingent $T_K(x)$ est en fait l'espace tangent à la sous-variété K au point x et vérifie

$$T_K(x) = \{v \in \mathbf{R}^n \mid g'_{(x)}(v) = 0\}.$$

Ainsi

$$G(T_K) = \{(x, v) \in \Omega \times \mathbf{R}^n \mid g(x) = 0,\ g'_{(x)}(v) = 0\}$$

est bien localement compact.

La proposition suivante donne l'expression de la dérivée contingente de la correspondance $T_K(\cdot)$ pour un tel ensemble.

PROPOSITION 2.2. *Soit* $K = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ *où* Ω *est un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, $g: \Omega \to \mathbf{R}^p$ *une application deux fois continûment différentiable sur* Ω *et telle que* $g'(x)$ *est surjective pour tout* $x \in K$.

Alors pour tout $(x, v) \in G(T_K)$ *nous avons*

$$D(T_K)(x, v)(v) = \{w \in \mathbf{R}^n \mid g''_{(x)}(v, v) + g'_{(x)}(w) = 0\}. \tag{2.2}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit pour cela de remarquer que $G(T_K)$ s'écrit sous la forme:

$$G(T_K) = \{(x, v) \in \Omega \times \mathbf{R}^n \mid h(x, v) = 0\}$$

où h désigne l'application continûment différentiable de $\Omega \times \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$ définie par

$$h(x, v) = (g(x), g'_{(x)}(v)) \qquad \text{pour tout } (x, v) \in \Omega \times \mathbf{R}^n.$$

Un calcul standard montre que $h'(x, v) \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p)$ est définie par

$$h'_{(x,v)}(s, t) = (g'_{(x)}(s), g''_{(x)}(v, s) + g'_{(x)}(t)) \qquad \text{pour tout } (s, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n.$$

On vérifie alors aisément que $h'_{(x,v)}$ est surjective en tout point de $G(T_K)$.

Ainsi

$$T_{G(T_K)}(x, v) = \left\{ (s, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \,\middle|\, \begin{array}{l} g'_{(x)}(s) = 0 \\ g''_{(x)}(v, s) + g'_{(x)}(t) = 0 \end{array} \right\}.$$

Ce qui implique bien que pour tout $(x, v) \in G(T_K)$

$$D(T_K)(x, v)(v) = \{ w \in \mathbf{R}^n \mid g''_{(x)}(v, v) + g'_{(x)}(w) = 0 \}.$$

Nous en déduisons alors la proposition suivante:

PROPOSITION 2.3. *Soit* $K = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ *où* Ω *est un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, $g: \Omega \to \mathbf{R}^p$ *une application deux fois continûment différentiable sur* Ω, *telle que* $g'(x)$ *est surjective en tout point de* K. *Soit* F *une correspondance de* $G(T_K)$ *dans* $\mathbf{R}^n$ *s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides.*

Alors la condition

($c_{2.3}$) *pour tout* $(x, v) \in G(T_K)$ *il existe* $w \in F(x, v)$ *tel que*

$$g''_{(x)}(v, v) + g'_{(x)}(w) = 0$$

équivaut à l'existence pour tout $(x, v) \in G(T_K)$ *d'un réel* $T > 0$ *et d'une application différentiable* $x(\cdot)$: $[0, T[\to \mathbf{R}^n$ *telle que* $x'(\cdot)$ *est lipschitzienne sur* $[0, T[$, $x(0) = x$, $x'(0) = v$ *et vérifiant*

$$(\mathrm{H}_{2.3}) \qquad \begin{cases} x''(t) \in F(x(t), x'(t)) & \textit{pour presque tout } t \in [0, T[, \\ x(t) \in \Omega, \quad g(x(t)) = 0 & \textit{pour tout } t \in [0, T[. \end{cases}$$

Cependant la Proposition 2.1 ne peut s'appliquer si $G(T_K)$ n'est plus localement compact. Ceci est prouvé par l'exemple suivant:

EXEMPLE 2.1. Soit $K = \mathbf{R}^+$ et F: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $F(x, v) = x - 1$ pour tout $(x, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Nous avons vu dans l'introduction que $G(T_K)$ n'est pas localement compact en $(0, 0)$. De plus la condition (c_2) ou (c_2^*) est facilement vérifiée sur $G(T_K)$. Pourtant il ne peut exister de solution $x(\cdot)$: $[0, T[\to \mathbf{R}^+$, $T > 0$, de l'équation différentielle du second ordre $x''(t) = x(t) - 1$ et vérifiant $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Dans le cas d'un ensemble K convexe localement compact nous avons le résultat suivant:

PROPOSITION 2.4. *Soit K un sous-ensemble convexe localement compact d'intérieur non vide de $\mathbf{R}^n$ et F: $G(T_K) \to \mathbf{R}^n$ une correspondance s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides.*

Alors pour tout $(x_0, v_0) \in G(T_K)$ tel que $v_0 \in \operatorname{int} T_K(x_0)$ il existe $T_0 > 0$ tel que $S_{T_0}(x_0, v_0)$ est non vide.

DÉMONSTRATION. Rappelons tout d'abord que la convexité de K implique que pour tout $x \in K$ nous avons

$$T_K(x) = \overline{\{\lambda(y-x) \mid \lambda > 0, \ y \in K\}}$$

et

$$\operatorname{int} T_K(x) = \{\lambda(y-x) \mid \lambda > 0, \ y \in \operatorname{int} K\}.$$

De plus nous savons que le graphe de $\operatorname{int} T_K(\cdot)$,

$$G(\operatorname{int} T_K) = \{(x, v) \in K \times \mathbf{R}^n \mid v \in \operatorname{int} T_K(x)\}$$

est ouvert dans $K \times \mathbf{R}^n$.

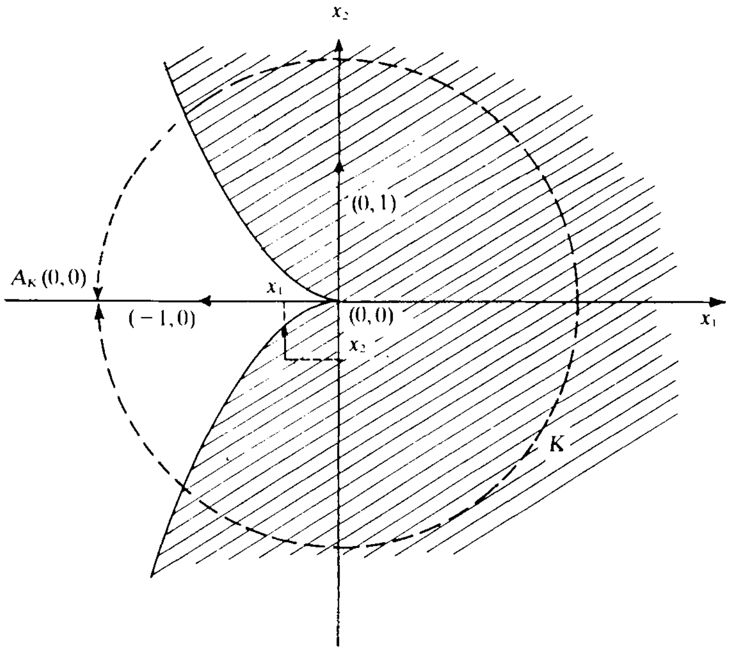
Ainsi comme K est localement compact, $G(\operatorname{int} T_K)$ est lui aussi localement compact.

Il suffit maintenant de vérifier que la correspondance qui à tout $(x, v) \in G(\operatorname{int} T_K)$ associe $\{v\} \times F(x, v)$ satisfait la condition de viabilité du Théorème 1.1. Soit alors $(x, v) \in G(\operatorname{int} T_K)$, il existe $\lambda > 0$ et $y \in \operatorname{int}(K)$ tels que $v = \lambda(y-x)$.

Alors $x + hv = x + h\lambda(y-x) \in \operatorname{int}(K)$ pour tout $h > 0$ assez petit. Ceci implique que $T_K(x+hv) = \mathbf{R}^n$. Il est alors facile de vérifier que pour tout $w \in F(x, v)$, $(x, v) + h(v, w) \in G(\operatorname{int} T_K)$ pour tout $h > 0$ assez petit. Ainsi $(v, w) \in T_{G(\operatorname{int} T_K)}(x, v)$.

Le résultat obtenu dans la Proposition précédente ne peut se généraliser à un ensemble localement compact non convexe. Ceci est prouvé par l'exemple suivant:

EXEMPLE 2.2. Soit $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^3 + x_2^2 \geqq 0\}$. Nous avons $T_K(0,0) = \mathbf{R}^2$. Cependant il ne peut exister de solution $x(\cdot)$: $[0, T[\to K$, $T > 0$, de l'équation différentielle du second ordre $x''(t) = 0$ telle que $x(0) = (0,0)$ et $x'(0) = (-1, 0) \in \operatorname{int} T_K(0,0) = \mathbf{R}^2$.



3. Le théorème principal

Nous sommes donc tout naturellement amenés dans un cadre plus général à imposer des conditions supplémentaires à la vitesse initiale. C'est pourquoi nous introduisons une notion différente de cône tangent dûe à Dubovickii–Miljutin [7], définissant pour tout $x \in K$ l'ensemble:

$$A_K(x) = \left\{ v \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \begin{array}{c} \text{il existe } \varepsilon > 0 \text{ et } \alpha > 0 \text{ tels que} \\ x + tB(v, \varepsilon) \subset K \text{ pour tout } t \in [0, \alpha] \end{array} \right\}.$$

Dans l'exemple 2.2, le cône $A_K(0,0)$ est précisément donné par

$$A_K(0,0) = \mathbf{R}^2 \backslash \{(x_1, 0) \mid x_1 \leqq 0\}.$$

Nous mentionnons maintenant quelques propriétés de ce cône.

Proposition 3.1. (a) *Pour tout* $x \in K$, $A_K(x)$ *est ouvert dans* $\mathbf{R}^n$ *et vérifie* $A_K(x) \subset \operatorname{int} T_K(x)$.

(b) *Si* K *est convexe alors* $A_K(x) = \operatorname{int} T_K(x)$ *pour tout* $x \in K$.

(c) *Soit* $K = L \cap M$ *avec* L *et* M *deux sous-ensembles donnés de* $\mathbf{R}^n$. *Pour tout* $x \in K$ *nous avons* $T_L(x) \cap A_M(x) \subset T_K(x)$.

DÉMONSTRATION. Les démonstrations de (a) et (b) n'offrent aucune difficulté (cf. [11]).

Soit maintenant $K = L \cap M$, $x \in K$ et $v \in T_L(x) \cap A_M(x)$. Une définition équivalente de $T_L(x)$ est que $v \in T_L(x)$ si et seulement si il existe une suite $h_q, h_q > 0$, et une suite $v_q, v_q \in \mathbf{R}^n$ telles que $h_q \to 0$, $v_q \to v$ et $x + h_q v_q \in L$ pour tout q.

De la définition de $A_M(x)$ on déduit facilement que $x + h_q v_q \in M$ pour tout q assez grand et donc que $x + h_q v_q \in L \cap M = K$. Ainsi $v \in T_K(x)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème d'existence suivant:

THÉORÈME 3.1. *Soit $K = L \cap M$ avec L et M deux sous-ensembles donnés de $\mathbf{R}^n$ et F: $G(T_K) \to \mathbf{R}^n$ une correspondance s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides. Supposons de plus que $G(T_L)$ soit localement compact et que*

$$(c_3) \qquad F(x, v) \cap D(T_L)(x, v)(v) \neq \emptyset \qquad \textit{pour tout } (x, v) \in G(T_K).$$

Alors pour tout (x_0, v_0) tel que $x_0 \in K$ et $v_0 \in T_L(x_0) \cap A_M(x_0)$, il existe $T_0 > 0$ tel que $S_{T_0}(x_0, v_0)$ est non vide.

DÉMONSTRATION. De la Proposition 3.1, nous remarquons tout d'abord que si $v_0 \in T_L(x_0) \cap A_M(x_0)$ alors $v_0 \in T_K(x_0)$. Ainsi $(x_0, v_0) \in G(T_K)$. De plus de $v_0 \in A_M(x_0)$ nous déduisons l'existence de $\varepsilon > 0$ et de $\alpha > 0$ tels que:

$$M_0 = \overline{\{x_0 + tv \mid v \in B(v_0, \varepsilon), t \in [0, \alpha]\}} \subset M.$$

Il est alors clair que M_0 est un convexe fermé de $\mathbf{R}^n$ et que $B(v_0, \varepsilon) \subset A_{M_0}(x_0) = \operatorname{int} T_{M_0}(x_0)$. Ainsi comme le graphe de $\operatorname{int} T_{M_0}(\cdot)$ est ouvert dans $M_0 \times \mathbf{R}^n$, il existe $\delta > 0$ tel que:

$$B(v_0, \delta) \subset \operatorname{int} T_{M_0}(x) = A_{M_0}(x) \qquad \text{pour tout } x \in M_0 \cap B(x_0, \delta).$$

De $M_0 \subset M$ nous déduisons aisément que $A_{M_0}(x) \subset A_M(x)$ pour tout $x \in M_0$. Définisssons alors

$$G_0 = [M_0 \cap B(x_0, \delta)] \times B(v_0, \delta) \cap G(T_L)$$

qui est clairement un sous-ensemble localement compact de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Vérifions maintenant que $G_0 \subset G(T_K)$. Soit $(x, v) \in G_0$, alors $x \in L \cap M_0 \subset L \cap M = K$. De plus $v \in T_L(x)$ et par construction $v \in A_{M_0}(x) \subset A_M(x)$. Ainsi $v \in T_L(x) \cap A_M(x) \subset T_K(x)$.

La démonstration du théorème sera alors terminée si nous montrons que le théorème 1.1 s'applique au problème de viabilité du premier ordre défini par G_0

et la correspondance associant à tout $(x, v) \in G_0$ l'ensemble $\{v\} \times F(x, v) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Il suffit en fait de vérifier la condition suivante:

$$[\{v\} \times F(x, v)] \cap T_{G_0}(x, v) \neq \varnothing \qquad \text{pour tout } (x, v) \in G_0.$$

De (c_3) nous déduisons que

$$[\{v\} \times F(x, v)] \cap T_{G(T_L)}(x, v) \neq \varnothing \qquad \text{pour tout } (x, v) \in G_0.$$

Ainsi de la caractérisation par les suites du cône contingent de Bouligand nous déduisons que pour tout $(x, v) \in G_0$ il existe $w \in F(x, v)$ et des suite h_q, $h_q > 0$, $v_q \in \mathbf{R}^n$ et $w_q \in \mathbf{R}^n$ telles que $h_q \to 0$, $v_q \to v$, $w_q \to w$ et $(x, v) + h_q(v_q, w_q) \in G(T_L)$ pour tout q. Il suffit alors de montrer que pour tout q assez grand $(x, v) + h_q(v_q, w_q) \in G_0$ et donc à $[M_0 \cap B(x_0, \delta)] \times B(v_0, \delta)$.

Le seul point non évident consistant à vérifier que pour tout q assez grand on a $x + h_q v_q \in M_0$.

Ceci se déduit directement du fait que $v_q \to v \in B(v_0, \delta) \subset A_{M_0}(x)$ et de la caractérisation de $A_{M_0}(x)$.

Le théorème précédent garantit seulement l'existence d'une solution pour une valeur initiale donnée (x_0, v_0) mais ne fournit aucune information sur les solutions à valeurs initiales dans un voisinage de (x_0, v_0). En particulier l'exemple suivant montrera que sous les hypothèses du théorème 3.1, pour de petites perturbations de la condition initiale, la longueur de l'intervalle de viabilité (i.e.: l'intervalle pour lequel la solution reste dans K) peut tendre vers zéro.

Exemple 3.1. Considérons, comme dans l'exemple 2.2, l'ensemble

$$K = M = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^3 + x_2^2 \geqq 0\}, \qquad L = \mathbf{R}^n$$

et le problème de viabilité du second ordre $x''(t) = 0$, $x(t) \in K$ sous la condition initiale $x(0) = (x_1, x_2)$, $x'(0) = (0, 1)$ avec (x_1, x_2) dans un voisinage de $(0, 0)$.

Clairement (cf. dessin): $(0, 1) \in A_K(0, 0)$ et $(0, 1) \in A_K(x_1, x_2)$ pour $x_1^3 + x_2^2 > 0$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ assez petits.

Un calcul simple montre que si $x(\cdot)\colon [0, T[\to K$ est une solution (viable) telle que $x(0) = (x_1, x_2)$ avec $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, $x_1^3 + x_2^2 > 0$ et $x'(0) = (0, 1)$ alors nécessairement $T \leqq -x_2$.

Ainsi pour obtenir des informations sur la persistance de solutions sur un intervalle de longueur minimum pour des valeurs initiales proches de (x_0, v_0) nous sommes amenés à imposer à (x_0, v_0) des conditions plus fortes.

Pour cela nous introduisons $G^0(T_M)$ l'intérieur du graphe de $T_M(\cdot)$ dans $M \times \mathbf{R}^n$ et $G^0(A_M)$ l'intérieur du graphe de $A_M(\cdot)$ dans $M \times \mathbf{R}^n$.

De plus pour tout $x \in M$ nous définissons le cône tangent de Clarke [5] au point x à M par

$$C_M(x) = \left\{ v \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \lim_{\substack{h \to 0^+ \\ y \to x \\ y \in M}} \frac{1}{h}\, d_M(y + hv) = 0 \right\}.$$

Nous avons alors la proposition suivante:

PROPOSITION 3.2. *Supposons M localement compact. Alors pour tout $x \in M$ les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(1) $v \in \operatorname{int} C_M(x)$,

(2) $(x, v) \in G^0(A_M)$,

(3) $(x, v) \in G^0(T_M)$.

DÉMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2). Soit $v \in \operatorname{int} C_M(x)$, nous savons (cf. Rockafellar [14]) que ceci est équivalent à l'existence de $\varepsilon > 0$ et de $\alpha > 0$ tels que $x' + tv' \in M$ pour tout $x' \in M \cap B(x, \varepsilon)$, tout $v' \in B(v, \varepsilon)$ et tout $t \in [0, \alpha]$.

Ceci permet directement de conclure que

$$[M \cap B(x, \varepsilon)] \times B(v, \varepsilon) \subset G(A_M)$$

et donc que $(x, v) \in G^0(A_M)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Cette propriété est immédiate car $G(A_M) \subset G(T_M)$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Soit $(x, v) \in G^0(T_M)$. Ceci signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x' \in M \cap B(x, \varepsilon)$ et tout $v' \in B(v, \varepsilon)$ on a $v' \in T_M(x')$. Or ceci implique (cf. Cornet [6]) que $B(v, \varepsilon) \subset C_M(x)$ et donc que $v \in \operatorname{int} C_M(x)$.

Nous avons alors le résultat suivant:

THÉORÈME 3.2. *Supposons satisfaites les hypothèses du Théorème* 3.1 *et supposons de plus que M est localement compact.*

Alors pour tout (x_0, v_0) tel que $x_0 \in K = L \cap M$ et $v_0 \in T_L(x_0) \cap \operatorname{int} C_M(x_0)$, il existe un voisinage U_0 de x_0 dans M, un voisinage V_0 de v_0 dans $\mathbf{R}^n$ et $T_0 > 0$ tels que $S_{T_0}(x, v)$ est non vide pour tout $(x, v) \in U_0 \times V_0 \cap G(T_L)$.

DÉMONSTRATION. Soit (x_0, v_0) tel que $x_0 \in K$ et $v_0 \in T_L(x_0) \cap \operatorname{int} C_M(x_0)$. De la Proposition 3.2 nous déduisons que $(x_0, v_0) \in G^0(A_M)$, ce qui signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(v_0, \varepsilon) \subset A_M(x)$ pour tout $x \in M \cap B(x_0, \varepsilon)$.

Considérons alors

$$G = [M \cap B(x_0, \varepsilon)] \times B(v_0, \varepsilon) \cap G(T_L).$$

G est localement compact car M et $G(T_L)$ sont localement compacts. De plus nous démontrons de façon identique à la démonstration du Théorème 3.1 que $G \subset G(T_K)$.

Nous affirmons enfin que la condition:

$$\{v\} \times F(x, v) \cap T_G(x, v) \neq \emptyset \qquad \text{pour tout } (x, v) \in G$$

est vérifiée. Ceci se démontrant encore exactement comme dans la démonstration du théorème 3.1.

Il suffit maintenant pour conclure d'appliquer à la valeur initiale (x_0, v_0), la dernière partie du Théorème 1.1 pour le problème de viabilité du premier ordre défini par G et la correspondance qui à tout $(x, v) \in G$ associe $\{v\} \times F(x, v) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Nous déduisons alors des deux théorèmes précédents le corollaire suivant:

Corollaire 3.1. *Soit K un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ et F: $G(T_K) \to \mathbf{R}^n$ une correspondance s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides.*

(1) *Pour tout $x_0 \in K$ et tout $v_0 \in A_K(x_0)$ il existe $T_0 > 0$ tel que $S_{T_0}(x_0, v_0)$ est non vide.*

(2) *Supposons de plus que K est localement compact. Alors pour tout $x_0 \in K$ et tout $v_0 \in \operatorname{int} C_K(x_0)$ il existe un voisinage U_0 de x_0 dans K et un voisinage V_0 de v_0 dans $\mathbf{R}^n$ et $T_0 > 0$ tels que pour tout $(x, v) \in U_0 \times V_0$ l'ensemble $S_{T_0}(x, v)$ est non vide.*

Démonstration. Les démonstrations sont des conséquences immédiates des deux théorèmes précédents en posant $L = \mathbf{R}^n$ et $K = M$. La condition (c_3) est alors automatiquement vérifiée car $G(T_L) = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

4. Applications

Dans cette partie nous donnons quelques corollaires des théorèmes précédents pour une classe particulière d'ensembles K définis par

$$K = \{x \in L \mid x \in \Omega, f(x) \in Z\}$$

où L et Z sont respectivement des sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$ et f une application d'un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$.

A cette fin nous utiliserons le résultat préliminaire suivant:

Proposition 4.1. *Soit $M = \{x \in \Omega \mid f(x) \in Z\}$ où Ω désigne un ouvert de $\mathbf{R}^n$, Z une partie de $\mathbf{R}^p$ et f une application de Ω dans $\mathbf{R}^p$.*

(a) *Si f est différentiable en $x_0 \in M$, alors:*

$$\{v \in \mathbf{R}^n \mid f'(x_0)(v) \in A_Z(f(x_0))\} \subset A_M(x_0).$$

(b) *Supposons Z localement compact et f continûment différentiable sur Ω. Alors pour tout $x_0 \in M$ on a:*

$$\{v \in \mathbf{R}^n \mid f'(x_0)(v) \in \operatorname{int} C_Z(f(x_0))\} \subset \operatorname{int} C_M(x_0).$$

DÉMONSTRATION. (a) Soit $v_0 \in \mathbf{R}^n$ tel que $f'(x_0)(v_0) \in A_Z(f(x_0))$. Comme $A_Z(f(x_0))$ est un ouvert dans $\mathbf{R}^p$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $f'(x_0)[\overline{B(v_0, \alpha)}] \subset A_Z(f(x_0))$. Il suffit alors de montrer l'existence de $\delta > 0$, tel que $\{x_0 + tv \mid v \in B(v_0, \alpha),\ t \in [0, \delta]\} \subset M$. Si cela n'était pas vrai, il existerait alors une suite $t_q > 0$, $t_q \to 0$ et une suite $v_q \in B(v_0, \alpha)$ telles que $x_0 + t_q v_q \notin M$ pour tout q. En prenant une sous-suite si nécessaire, nous pouvons supposer que $v_q \to v \in \overline{B(v_0, \alpha)}$.

De la différentiabilité de f en x_0 nous déduisons que

$$\frac{f(x_0 + t_q v_q) - f(x_0)}{t_q} \to f'(x_0)(v) \in A_Z(f(x_0)).$$

De la définition du cône $A_Z(f(x_0))$ nous déduisons que

$$f(x_0 + t_q v_q) = f(x_0) + t_q \frac{f(x_0 + t_q v_q) - f(x_0)}{t_q} \in Z$$

pour tout q assez grand.

Ceci contredit $x_0 + t_q v_q \notin M$ et termine la démonstration de (a).

(b) Soit $v_0 \in \mathbf{R}^n$ tel que $f'(x_0)(v_0) \in \operatorname{int} C_Z(f(x_0))$. Comme Z est localement compact ceci équivaut d'après la Proposition 3.2 à $(f(x_0), f'(x_0)(v_0)) \in G^0(A_Z)$ l'intérieur dans $Z \times \mathbf{R}^p$ du graphe de la correspondance $A_Z(\cdot)$.

De la continuité de l'application f' en x_0 nous déduisons la continuité au point (x_0, v_0) de l'application qui à tout (x, v) dans $\Omega \times \mathbf{R}^n$ associe $(f(x), f'(x)(v))$.

Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in M \cap B(x_0, \varepsilon)$ et tout $v \in B(v_0, \varepsilon)$ nous avons $(f(x), f'(x)(v)) \in G^0(A_Z)$ et donc $f'(x)(v) \in A_Z(f(x))$, ce qui d'après (a) implique que $v \in A_M(x)$. Ainsi $(x_0, v_0) \in G^0(A_M)$. Les hypothèses impliquant que M est lui aussi localement compact, nous déduisons, toujours de la Proposition 3.2, que $v_0 \in \operatorname{int} C_M(x_0)$.

THÉORÈME 4.1. *Soit $K = \{x \in L \mid x \in \Omega,\ f(x) \in Z\}$ et F: $G(T_K) \to \mathbf{R}^n$ une correspondance s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides.*

Supposons que $G(T_L)$ est localement compact et que

(c_3) $\qquad F(x, v) \cap D(T_L)(x, v)(v) \neq \varnothing \qquad$ *pour tout* $(x, v) \in G(T_K)$.

(a) *Soient* $x_0 \in K$ *et* $v_0 \in T_L(x_0)$ *tels que* f *est différentiable en* x_0, $f'(x_0)(v_0) \in A_Z(f(x_0))$.

Il existe alors $T_0 > 0$ *tel que* $S_{T_0}(x_0, v_0)$ *est non vide.*

(b) *Supposons* Z *localement compact et* f *continûment différentiable sur* Ω. *Pour tout* (x_0, v_0) *tel que* $x_0 \in K$, $v_0 \in T_L(x_0)$ *et* $f'(x_0)(v_0) \in \operatorname{int} C_Z(f(x_0))$, *il existe un voisinage* U_0 *de* x_0 *dans* K, *un voisinage* V_0 *de* v_0 *dans* $\mathbf{R}^n$ *et* $T_0 > 0$ *tels que* $S_{T_0}(x, v)$ *est non vide pour tout* $(x, v) \in U_0 \times V_0 \cap G(T_L)$.

La démonstration de ce résultat se déduit directement du Théorème 3.1 et du Théorème 3.2 ainsi que de la Proposition 4.1 en considérant $M = \{x \in \Omega \mid f(x) \in Z\}$.

Pour terminer considérons un ensemble K défini par

$$K = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0,\ f_i(x) \geqq 0,\ i \in I\}$$

où Ω désigne un ouvert de $\mathbf{R}^n$, g une application deux fois continûment différentiable de Ω dans $\mathbf{R}^p$ telle que $g'(x)$ est surjective en tout point $x \in \Omega$ tel que $g(x) = 0$ et où f_i, $i \in I$, désigne une famille finie de fonctions de Ω dans $\mathbf{R}$.

Pour tout $x \in \Omega$ nous définissons $I(x) = \{i \in I \mid f_i(x) = 0\}$. Nous avons alors le résultat suivant:

Corollaire 4.1. *Soit* $F\colon G(T_K) \to \mathbf{R}^n$ *une correspondance s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides et telle que pour tout* $(x, v) \in G(T_K)$ *il existe* $w \in F(x, v)$ *vérifiant*

$$(*) \qquad g''_{(x)}(v, v) + g'_{(x)}(w) = 0.$$

(a) *Soient* $x_0 \in K$ *et* $v_0 \in \mathbf{R}^n$ *tels que* $g'(x_0)(v_0) = 0$ *et tels que les* f_i, $i \in I$, *sont différentiables en* x_0 *et vérifient* $f'_i(x_0)(v_0) > 0$ *pour tout* $i \in I(x_0)$.

Il existe alors $T_0 > 0$ *tel que* $S_{T_0}(x_0, v_0)$ *est non vide.*

(b) *Supposons de plus que chaque* f_i, $i \in I$ *est continûment différentiable sur* Ω. *Pour tout* (x_0, v_0) *tel que* $x_0 \in K$, $g'(x_0)(v_0) = 0$ *et* $f'_i(x_0)(v_0) > 0$ *pour tout* $i \in I(x_0)$, *il existe un voisinage* U_0 *de* x_0 *dans* K, *un voisinage* V_0 *de* v_0 *dans* $\mathbf{R}^n$ *et* $T_0 > 0$ *tels que* $S_{T_0}(x, v)$ *est non vide pour tout* $(x, v) \in U_0 \times V_0$ *tel que* $g'(x)(v) = 0$.

Démonstration. La démonstration de ce corollaire est aisément déduite du théorème précédent et de la Proposition 2.2 en posant $p = \operatorname{card} I$,

$$L = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}, \quad f = (f_i)_{i \in I} \quad \text{et} \quad Z = \mathbf{R}^p_+ = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \geqq 0,\ i \in I\}.$$

La seule originalité consistant à remarquer que pour $f(x_0) \in \mathbf{R}^p_+$ convexe fermé, on a:

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{R}_+^p}(f(x_0)) &= \operatorname{int} C_{\mathbf{R}_+^p}(f(x_0)) \\ &= \operatorname{int} T_{\mathbf{R}_+^p}(f(x_0)) \\ &= \{(\alpha_i)_{i\in I} \mid \alpha_i > 0 \text{ pour tout } i \in I(x_0)\}. \end{aligned}$$

Références

1. J. P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, 1984.

2. J. P. Aubin and F. Clarke, *Monotone invariant solutions to differential inclusions*, J. London Math. Soc. (2) **16** (1977), 357–366.

3. J. P. Aubin, A. Cellina and J. Nohel, *Monotone trajectories of multivalued dynamical systems*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **115** (1977), 99–117.

4. G. Bouligand, *Introduction à la géométrie infinitésimale*, Gauthiers Vilars, Paris, 1932.

5. F. Clarke, *Generalized gradients and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **205** (1975), 247–262.

6. B. Cornet, Thèse d'Etat, Théorème 2.7, p.I.9., Université de Paris IX, 1981.

7. A. J. Dubovickii and A. A. Miljutin, *Extremum problems with constraints*, Soviet. Math. **4** (1963), 452–455.

8. S. Gautier, *Equations différentielles multivoques sur un fermé*, Publication interne, Université de Pau, 1976.

9. S. Gautier and J. P. Penot, *Fermés invariants par un système dynamique*, C.R. Acad. Sci. Paris A **276** (1973), 1457–1460.

10. G. Haddad, *Monotone trajectories of differential inclusions and functional differential inclusions with memory*, Isr. J. Math. **39** (1981), 83–100.

11. P. J. Laurent, *Approximation et Optimisation*, Hermann, 1972.

12. M. Nagumo, *Uber die Laga der Integralkurven gewöhnlicher differential Gleichungen*, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **24** (1942), 551–559.

13. R. M. Redheffer, *The theorems of Bony and Brézis on flow invariants sets*, Amer. Math. Monthly **79** (1972), 790–797.

14. T. Rockafellar, *Clarke's tangent cones and the boundaries of closed sets in R^n*, Non-linear Analysis **3** (1979), 145–154.

15. G. Seifert, *Positively invariant closed sets for systems of delay differential equations*, J. Differ. Equ. **22** (1976), 292–304.

16. J. A. Yorke, *Invariance for ordinary differential equations*, Math. Systems Theory **1** (1967), 353–372.